Drugi domaći zadatak iz predmeta Matematika 1

1. Odrediti koeficijente a i b u polinomu $P(x) = x^4 - ax^3 - 2x^2 + 6x + b$ tako da zbir svih nula ovog polinoma bude jednak 1, a njihov proizvod bude -4. Odrediti sve nule tako dobijenog polinoma.

2. Odrediti sve nule polinoma $P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12$.

3. a) Koristeći Hornerovu šemu pokazati da je $x = 1$ trostruka nula polinoma $P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$.
   b) Koristeći Hornerovu šemu odrediti koeficijente A i B tako da je $x = 1$ dvostruka nula polinoma $P(x) = Ax^4 + Bx^2 + 1$.

4. a) Koristeći Hornerovu šemu razviti polinom $P(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 6x + 1$ po stepenima $x - 1$.
   b) Koristeći Hornerovu šemu odrediti koeficijente a i b tako da polinom $P(x) = 2x^6 + ax^5 - 4x^4 - 5x^3 - bx^2 + 4x + 3$ bude deljiv sa $x - 1$ i $x + 3$.

5. Data je matrica $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Odrediti A^n.

6. Izračunati $f(A) + f(B^T)$ ako je $f(x) = x^2 + 5x - 2 + x^{-1}$, gde je $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Rešiti matričnu jednačinu $X(A + I) = 2A - I$, gde je I jedinična matrica i $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

8. Rešiti matričnu jednačinu $AX = 2BX + I$, gde je I jedinična matrica, dok su matrice A i B
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Odrediti rang matrice
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Izračunati determinantu $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & -11 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

11. Izračunati determinantu $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

12. U zavisnosti od realnog parametra λ odrediti rang matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

13. U zavisnosti od realnog parametra a metodom Kroneker-Kapeli diskutovati rešivost sistema. U slučajevima kada je sistem rešiv, naći to rešenje.
$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + (1 - a)y + z &= 2a \\ x + y + az &= -a \end{aligned}$$

14. U zavisnosti od realnog parametra a, metodom Kramera diskutovati i rešiti sistem jednačina
$$\begin{aligned} (1 + a)x + y + z &= 1 \\ x + (1 + a)y + z &= a \\ x + y + (1 + a)z &= a^2 \end{aligned}$$

15. U zavisnosti od realnog parametra a, metodom Kroneker-Kapeli ili metodom Kramera diskutovati i rešiti sistem jednačina
$$\begin{aligned} x+y+az &= 1-a \\ ax-y+z &= -1 \\ x-ay-z &= 0 \end{aligned}.$$

16. Odrediti parametar m tako da homogen sistem ima netrivijalna rešenja, a zatim naći ta rešenja.
$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ mx+4y+z &= 0 \\ 6x+(m+2)y+2z &= 0 \end{aligned}$$

17. Dati su vektori $\vec{a}=(2,0,1)$ i $\vec{b}=(-1,-3,2)$.

    a) Odrediti vektor $\vec{x}$ iz uslova $\vec{a}\cdot\vec{x}=4$ i $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$.

    b) Izračunati zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{x}$.

    c) Odrediti ugao izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{x}$.

18. Neka su $\vec{p}=\alpha\vec{m}+2\vec{n}$ i $\vec{q}=5\vec{m}-4\vec{n}$ ortogonalni vektori, gde su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori.

    a) Ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ortogonalni vektori, odrediti α.

    b) Za $\alpha=1$ naći ugao izmedju $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

19. Dati su vektori $\vec{a}=(3,9,4)$, $\vec{b}=(1,2,1)$ $\vec{c}=(2,-3,-3)$ i $\vec{d}=(3,2,-1)$. Dokazati da su vektori $\vec{a}\times\vec{b}$ i $\vec{d}-\vec{c}$ normalni.

20. Napisati jednačinu ravni u kojoj se nalaze paralelne prave
$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{7} \text{ i } \frac{x}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-1}{7}.$$

21. Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz koordinatni početak $O(0,0,0)$ i normalna je na ravni
$$\beta: 2x-y+5z+3=0 \text{ i } \alpha: x+3y-z-7=0.$$

22. Napisati jednačinu ravni u kojoj se nalaze tačka $A(1,0,2)$ i prava
$$\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}.$$
    Potom izračunati rastojanje tačke $B(0,1,1)$ od date ravni.

23. Napisati jednačinu prave koja je normalna na ravan $\alpha: 2x-3y+5z-2=0$ i sadrži tačku $A(1,6,4)$.